Quesiti

- Determinare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

$Tr = 6-2 = 8$

$\det = 12+3 = 15$

$\Rightarrow P_A(t) = t^2 - 8t + 15 = 0 \qquad t = 4 \pm \sqrt{16-15} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

$V_1: \begin{cases} 6x+3y = 5x \\ -x+2y = 5y \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3y \\ -x = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Base: $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V_2: \begin{cases} 6x+3y = 3x \\ -x+2y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = -3y \\ -x = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Determinare tutti i vettori di $\mathbb{C}^3$ unitari, aventi prima componente immaginaria pura e somma delle componenti nulle e ortogonali a $(1-i)e_1 + 2ie_2 + (3+i)e_3$

Cerco un vettore della forma $\begin{pmatrix} i \\ \alpha \\ -\alpha - i \end{pmatrix}$

Inoltre $\perp \begin{pmatrix} 1-i \\ 2i \\ 3+i \end{pmatrix}$

Quindi: $i(1+i) + \alpha(-2i) + (-\alpha - i)(3-i) = 0$ | metto i coniugati di $\begin{pmatrix} 1-i \\ 2i \\ 3+i \end{pmatrix}$

$i - 1 - 2\alpha i - 3\alpha + \alpha i - 3i + 1 = 0$

$\alpha(-2i - 3 + i) - 2i = 0$

$\alpha = \frac{2i+2}{-i-3} = \frac{(2+2i)(3-i)}{(-3-i)(-3+i)} = -\frac{6-2i+6i+2}{9+1} = \frac{8+4i}{10} = -\frac{1}{10}(8+4i) = -\frac{1}{5}(4+2i)$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{5}(4+2i) \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} i \\ \frac{1}{5}(-4-2i) \\ \frac{1}{5}(4+2i) - i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5i \\ -4-2i \\ 4-3i \end{pmatrix} \quad 5\left(\frac{1}{5}(4+2i) - i\right) = 4 - 3i$

$v = \frac{1}{\sqrt{5^2+4^2+2^2+4^2+3^2}} \begin{pmatrix} 5i \\ -4-2i \\ 4-3i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 5i \\ -4-2i \\ 4-3i \end{pmatrix}$

- Determinare l'intersezione di $\{[t+1 : 2t-1 : 3-t] : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $xy + yz - z^2 - \sqrt{3}z = 1$

$(t+1)(2t-1) + (2t-1)(3-t) - (3-t)^2 = 0$ Restano solo i quadrati e i prodotti (nelle quadratiche) e quegli lì a zero.

$2t^2 - t + 2t - 1 + 6t - 2t^2 - 3 + t - (9 - 6t + t^2) = 0$

$-t^2 + 14t - 13 = 0$

$t_1, t_2 = \frac{-14 \pm 12}{2} = \begin{cases} 13 \\ 1 \end{cases}$

Sostituisco le t trovate nella dicitura in partenza:

$t = 1 \Rightarrow [2 : 1 : 2]$

$t = 13 \Rightarrow [14 : 25 : -10]$

• Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $2kx^2 + 2(1-k)xy + \frac{1}{4}y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ è un'ellisse.

Matrice associata: $\begin{pmatrix} 2k & 1-k & \sqrt{2} \\ 1-k & 1/4 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 2k & 1-k \\ 1-k & 1/4 \\ \sqrt{2} & 0 \end{matrix}$

L'ellisse ha $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_2 < 0$

$d_1 = 2k > 0$ per $k > 0$

$d_2 = \det \begin{vmatrix} 2k & 1-k \\ 1-k & 1/4 \end{vmatrix} = \frac{k}{2} - (1-k)^2 = \frac{k}{2} - 1 - k^2 + 2k > 0$

$-k^2 + 2k + \frac{k}{2} - 1 < 0$

$-2k^2 + 4k + k - 2 < 0$

$2k^2 - 5k + 2 > 0$

$k = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} < k < 2$

$d_3 = 2k\left(\frac{1}{4}\right) - (1-k)(1-k) - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{k}{2} - (1-k)^2 - \frac{1}{2} = \frac{k}{2} - 1 - k^2 + 2k - \frac{1}{2} > 0$

$-k^2 + 2k + \frac{k}{2} - 1 - \frac{1}{2} < 0$

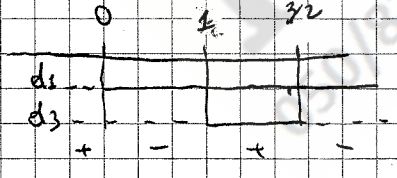
$-2k^2 + 4k + k - 2 - 1 < 0$

$2k^2 - 5k + 3 > 0$

$k = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$

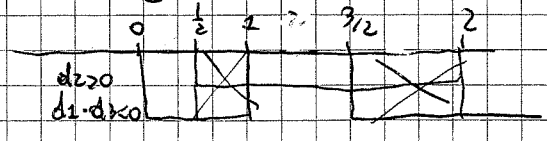
$1 < k < \frac{3}{2}$

$d_1 \cdot d_3 < 0 \Rightarrow$



$d_1 \cdot d_3 < 0$ in $0 < k < 1 \quad k > \frac{3}{2}$

Allora $d_2 > 0$ e $d_1 \cdot d_3 < 0 \Rightarrow$



$\frac{1}{2} < k < 1 \quad \cup \quad \frac{3}{2} < k < 2$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

• Determinare el tipo di affine della quadrica di equazione $xy+xz+yz+z^2-y+3$

$xy+xz+yz+z^2-y-3=0$

Scrivo la matrice associata: $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Quando $d_3=0$ bisogna guardare se il d_4 è $\neq 0$. In tal caso ho
- Parab. ellittico: $++0$
- Parab. iperbolico: $+-0$

$d_1=0$ assumo come positivo

$d_2=-\frac{1}{4}<0$ $\quad d_3=0$

Quindi può essere solo parabolaide iperbolico (perché $d_4\neq 0$)

• Esibire la matrice hessiana nel punto $(1,-1)$ della funzione $f(x,y)=9\ln(1+2xy^4)$ e determinare i segni dei suoi autovalori.

Gradiente: a) $\frac{\partial f}{\partial x}=9\cdot\frac{1}{1+2xy^4}\cdot 2y^4$ b) $\frac{\partial f}{\partial y}=9\cdot\frac{1}{1+2xy^4}\cdot 2x4y^3=\frac{9}{1+2xy^4}\cdot 8xy^3$

a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x}=\frac{-18y^4(2y^4)}{(1+2xy^4)^2}=\frac{-36y^8}{(1+2xy^4)^2}$ (1)

$\frac{\partial^2 f}{\partial y}=\frac{72y^3(1+2xy^4)-18y^4(8xy^3)}{(1+2xy^4)^2}=\frac{72y^3+144xy^7-144xy^7}{(1+2xy^4)^2}=\frac{72y^3}{(1+2xy^4)^2}$ (2)

$\begin{pmatrix} (1) & (2) \\ (2) & (3) \end{pmatrix}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y}$

b) $\frac{\partial^2 f}{\partial y}=\frac{216xy^2(1+2xy^4)-72xy^3(8xy^3)}{(1+2xy^4)^2}=\frac{216xy^2+432x^2y^6-576x^2y^6}{(1+2xy^4)^2}$ (3)

Matrice hessiana: $\begin{pmatrix} \frac{-36}{9} & \frac{-72}{9} \\ -\frac{72}{9} & \frac{216+432-576}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

Gli autovalori hanno segno uno positivo e uno negativo poiché:

$\lambda_1=d_1=-4<0$ è negativo

$\lambda_2=\frac{d_1}{d_2}=\frac{-4}{-32-64}>0$ è positivo

• Calcolare $\int_\alpha (y^2\,dx-x^2\,dy)$ con $\alpha(t)=\begin{pmatrix} x=\cos t \\ x=\sin t \end{pmatrix}$ per $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$

Ho $\begin{matrix} x=\cos t & dx=-\sin t \\ y=\sin t & dy=\cos t \end{matrix}$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t(-\sin t)-\cos^2 t(\cos t)\,dt=-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 t+\cos^3 t\,dt$

Svolgo l'integrale

$\left(-\frac{1}{3}\cos^3 t+\cos t+\frac{1}{3}\sin^3 t-\sin t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{2}{3}$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

• Calcolare la curvatura in $(0,0)$ della curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ \sin(\pi^2 t) \end{pmatrix}$

CURVATURA:

$k(t_0) = \dfrac{\det(\alpha'(t_0)\ \alpha''(t_0))}{\|[\alpha'(t_0)]\|^3}$ dove t_0 è il valore che rende $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Caso t_0: $\ln t = 0$ per $t_0 = 1$

$\sin(\pi^2 t) = 0$ per $t_0 = 1$

$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ \pi^2 \cos(\pi^2 t) \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} -1/t^2 \\ -\pi^2 \sin(\pi^2 t) \end{pmatrix}$

$\alpha'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\pi^2 \end{pmatrix}$ $\qquad \alpha''(t_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\pi^2 & 0 \end{pmatrix} = -\pi^2$ $\qquad \|\alpha(t_0)\|^3 = \sqrt{(1^2 + (-\pi^2)^2)^3} = \sqrt{(1+\pi^2)^3}$

$\Rightarrow k = \dfrac{-\pi^2}{\sqrt{(1+\pi^2)^3}}$

• Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la quadratica di equazione $2y^2 - 8z^2 + 2xy + 2kxz + 2k - 8z + 1 = 0$ è un paraboloide iperbolico:

Matrice associata: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ k & 0 & -8 & -4 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Il paraboloide iperbolico: $d_1 > 0$, $d_2 < 0$, $d_3 \neq 0$

$d_1 = 0$ $\quad d_1 > 0$

$d_2 = -1 < 0$

$d_3 = \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & k & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ k & 0 & -8 & k & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow -(-8 + 2k^2) = +8 - 2k^2 = 0 \quad k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

$d_3 \geq 0$ per $k \leq -2$ $\quad k \geq 2$

$\Rightarrow d_1 > 0$, $d_2 < 0$ $d_3 \geq 0$ per • $k \leq -2$

• Trovare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza

$Tr = 4$ $\quad \det = -21$

$P_A(t) = t^2 - 4t - 21 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 7 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

V_1: $\begin{cases} 5x + 2y = 7x \\ 8x - y = 7y \end{cases}$ $\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 8x - 8y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Base: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ +4 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 5x + 2y = -3x \\ 8x - y = -3y \end{cases}$ $\begin{cases} 8x + 2y = 0 \\ 8x + 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ +4 \end{pmatrix}$

• Trovare una matrice coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & \sqrt{6} \\ 3 & -\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$ avente due soli coefficienti non nulli.

matrice antisimm.

$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 & 3 \\ 1 & t & -\sqrt{6} \\ -3 & \sqrt{6} & t \end{pmatrix} = -t^3 + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{6} - (9t + 6t + t) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 4i \quad \lambda_3 = -4i$

$\Rightarrow$ Matrice coniugata $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

se $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm \alpha i$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• Provare che $\begin{pmatrix} 4 & i \\ 3+6i & i-1 \end{pmatrix}$ ha un autovalore λ reale e trovare un relativo autov. r.

$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-4 & -i \\ -3-6i & t-(i-1) \end{pmatrix} = (t-4)(t-(i-1)) + i(-3-6i) = t^2 - t(3+i) + i + 2 = 0$

$\lambda_1 = 2+i$ $\quad \lambda_2 = 1$ $\Rightarrow$ autov. reale

V_1: $4x + iy = x \quad 3x = -iy \quad x = -\frac{i}{3}y \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} +1 \\ 3i \end{pmatrix}$

• Determinare i punti di intersezione tra $\{[t-1 : t+2 : t] : t \in \mathbb{R}\} \subset P^2(\mathbb{R})$ e l'insieme dei punti all'infinito della quadrica di equazione $x^2 + 3xy + 2y^2 + 7x = 12$

$(t-1)^2 + 3(t-1)(t+2) - 2(t+2)t = 0$

$t^2 + 1 - 2t + 3t^2 + 6t - 3t - 6 - 2t^2 - 4t = 0 \quad 2t^2 - 3t - 5 = 0$

$t = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} = \begin{cases} 5/2 \\ -1 \end{cases}$

$t = \frac{5}{2} \Rightarrow \left[\frac{5}{2} - 1 : \frac{5}{2} + 2 : \frac{5}{2}\right] = [3 : 9 : 5]$

$t = -1 \Rightarrow [-2 : 1 : -1]$

MASTER COPY
Tel. 388/9837745

• Calcolare l'angolo tra i vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{2}$

$\theta = \arccos \frac{3 \cdot 2 + (-1)(1)}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \arccos \frac{6-1}{5\sqrt{2}} = \arccos \frac{5}{5\sqrt{2}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45° = \frac{\pi}{4}$ $\quad \theta = \arccos \frac{\langle u | v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$

• Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $2x^2 + 4kxy + y^2 + 6x = 3$ è un'iperbole

$\begin{pmatrix} 2 & 2k & 3 \\ 2k & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad d_1 = 2 > 0$ $\quad d_2 = 2 - 4k^2 < 0 \quad 2 - 4k^2 = 0 \quad k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad$ Per $-\frac{1}{\sqrt{2}} < k < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$d_3 \neq 0 \quad d_3 = -6 - 9 + 12k^2 \neq 0 \quad 12k^2 \neq 15 \quad 4k^2 \neq 5 \quad k^2 \neq \frac{5}{4}$ $\quad k \neq \sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$